UNIVERZITET CRNE GORE

Elektrotehnički fakultet – Podgorica

Elektromagnetika

1 Osnovne veličine i zakonitosti električnog i magnetnog polja

1.1 Vezano i slobodno naelektrisanje

U električnom pogledu sve supstance u prirodi se ponašaju zavisno od toga da li u njima preovladavaju takozvana **vezana** ili takozvana **slobodna** naelektrisanja.

Vezana naelektrisanja su elementarne naelektrisane čestice koje su sastavni dio molekula tj atoma. Drugim riječima, to su čestice čije je kretanje ograničeno (limitirano) na dimenzije atoma, odnosno molekula. U normalinim okolnostima, bez spoljnjeg dejstva, ta elementarna opterećenja unutar atoma, odnosno molekula, čine jednu kompaktnu cjelinu. Pod odgovarajućim dejstvom na supstancu to naelektrisanje mijenja svoju normalnu poziciju, ali i dalje ostaje sastavni dio atoma (odnosno molekula). Otuda im i ime.

Slobodna naelektrisanja su naelektrisanja koja ne pripadaju ni jednom atomu i pod uticajem spoljašnjeg dejstva na supstancu ta naelektrisanja se mogu kretati na rastojanja koja prevazilaze dimenzije atoma (tj molekula). Dakle, ova naelektrisanja izvode makroskopsko kretanje, bilo da je haotično, bilo da je usmjereno, kada obrazuje električnu struju. U slobodna naelektrisanja spadaju, prije svega, slobodni elektroni unutar provodnika (na primjer metali) koji se kreću manje više slobodno između čvorova kristalne rešetke, zatim joni jonizovanog gasa i joni u elektrolitima. (Jon – atom ili molekul kojima su otrgnuti jedan ili više elektrona).

Dakle, zavisno od toga čiji uticaj preovladava u nekoj supstanci, da li uticaj vezanih ili pak slobodnih naelektrisanja, sve supstance u prirodi se dijele na:

- **Dielektrike** – imaju veoma mali broj slobodnih naelektrisanja;
- **Provodnike** – imaju veliki broj slobodnih naelektrisanja;
- **Poluprovodnike** – imaju daleko manje slobodnih elektrona nego metali, ali daleko više nego izolatori.

Idealni dielektrik (izolator) bila bi ona supstanca u kojoj uopšte nema slobodnih elektrona. To znači da se u ovakvoj supstanci ne može uspostaviti električni tok. Takvog dielektrika u prirodi nema, ali se neke supstance približavaju tome (na primjer vazduh).

Veličina kojom karakterišemo sposobnost supstance da se u njoj ostvari usmjereni tok elektrona zove se specifična električna provodnost. Dimenzija joj je $\sigma (=) \frac{S}{m}$.

1.2 Naelektrisano tijelo

Sva materijalna supstanca sastavljena je od takozvanih diskretnih čestica. U normalnim okolnostima svaki atom, bilo kakve supstance (provodne ili neprovodne), sadrži podjednak broj pozitivnih i negativnih naelektrisanih čestica. Znači, u normalnim okolnostima atom je neutralan. Dakle, i domen supstance je neutralan, tj nenaelektrisan. Šta sada znači naelektrisati neko tijelo?

Kako je elementarni kvant ili najmanje naelektrisanje u prirodi ono koje nosi jedan elektron ($e=-1{,}6*10^{-19}$ C) to se, na pogodan način, odvode ili dovode elementarna naelektrisanja. Pa se kaže da je tijelo negativno naelektrisano ako ima višak elektrona, a pozitivno ako ima manjak elektrona.

Količina naelektrisanja na nekom tijelu nije kontinualna veličina već diskretna. A to znači da je svaka druga količina naelektrisanja data kao cjelobrojni umnožak elementarne količine naelektrisanja e :

$$Q = n \cdot e; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{0.1}$$

Kako je e vrlo mala veličina, a količina elektriciteta koje u praksi srećemo sadrže veliki broj ovih elementarnih količina e to se u inženjerskoj praksi smatra da je količina naelektrisanja kontinualna veličina jer manjak ili višak jednog ili više elektrona u tako velikom broju istih praktično ništa ne znači.

1.3 Pojam beskonačno male veličine u fizici

Pokazalo se neophodnim da se uvede pojam beskonačno male veličine, kao što su beskonačno mala zapremina $d\upsilon$ (označavanje isto kao i u matematici), beskonačno mala površina dS , beskonačno mala dužina dl , beskonačno malo naelektrisanje dq itd. Ali za razliku od matematičkog pojma, gdje se pojam beskonačno malog tretira kao nešto najmanje što se može zamisliti, u Fizici pa prema tome i u Elektrotehnici, pojam beskonačno malog se tretira u relativnom smislu, tj u poređenju sa nečim realnim.

Na primjer, uočimo domen υ neke supstance. Tada pod pojmom beskonačno malog elementa tog domena $d\upsilon$ podrazumijevamo sledeće: element $d\upsilon$ je daleko manji od domena υ, ali ipak dovoljno veliki da u sebi sadrži značajan broj atoma ili molekula. Konkretno, sfera poluprečnika $10^{-7}m$, što znači zapremine $\approx 10^{-21}m^3$, može se smatrati beskonačno malom fizičkom veličinom, jer ipak u sebi sadrži oko 10^3 atoma gasa ($1m^3$ gasa sadrži oko 10^{24} atoma) ili oko 10^9 atoma čvrste supstance ($1m^3$ čvrste supstance sadrži oko 10^{30} atoma).

Zašto uvodimo ovaj pojam?

Sve veličine unutar ovako malog elementa $d\upsilon$ mogu se smatrati <u>konstantnim</u> odnosno, sve nehomogenosti unutar tako male zapremine mogu se zanemariti, kao na primjer, raspored elementarnih čestica, tj gustina naelektrisanja se može uzeti da je ravnomjerna (iako to u stvarnosti nije), raspored sila između čestica, itd.

Ovo je takozvani makroskopski pristup posmatranja ili pristup usrednjavanja, za razliku od takozvanog mikroskopskog pristupa koji se provodi u Atomskoj i Nuklearnoj fizici, gdje se mora voditi računa i o pojedinačnim česticama, odnosno pojedinim atomima.

Ovakav makroskopski pristup omogućava nam da definišemo sledeće veličine:

- Zapreminska gustina naelektrisanja : $\rho = \dfrac{dQ}{d\upsilon}\left(=\dfrac{C}{m^3}\right)$
- Površinska gustina naelektrisanja : $\eta = \dfrac{dQ}{dS}\left(=\dfrac{C}{m^2}\right)$

- Linijska (podužna) gustina naelektrisanja : $q' = \frac{dQ}{dl}\left(=\frac{C}{m}\right)$

u inženjerstvu je uobičajen makroskopski pristup.

2 Električno polje. Fluks Električnog polja

Kada u neki dio prostora unesemo naelektrisano tijelo onda to naelektrisanje dovodi okolnu sredinu u naročito fizičko stanje elastične napetosti, koje se manifestuje odbojnim ili privlačnim dejstvom (silama) na naelektrisanja koja se unesu u taj dio prostora. Kažemo „naročito stanje" zato što nijesmo u mogućnosti da tačno objasnimo to stanje!

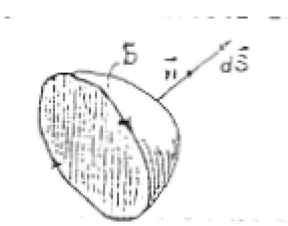
Takvo stanje u okolini naelektrisanog tijela zovemo električno polje!

Da bi smo ovo stanje kvantitativno okarakterisali iskoristićemo njegovu vizuelnu manifestaciju mehaničkog djelovanja (dakle, pojava sile između naelektrisanih tijela), pa kažemo:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{0.2}$$

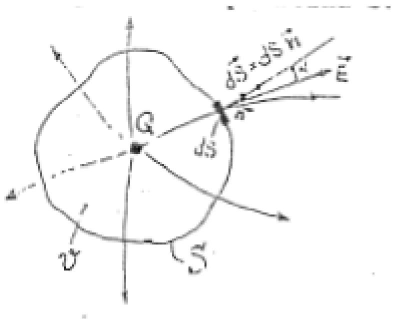
Vizuelno ga predstavljamo pomoću takozvanih linija električnog polja ili linija sile. To su takve linije u čijoj svakoj tački je vektor $\vec{E}$ tangenta. Te linije u stvari predstavljaju trajektorije pozitivnog probnog naelektrisanja (probno naelektrisanje je takvo naelektrisanje koje ne unosi značajnu deformaciju polja u koje je unijeto). Dakle, pomoću ovih linija dobijamo predstavu o „slici" polja. Da bi ova „slika" bila potpunija uveden je dogovor da se intenzitet polja određuje brojem ovih linija na jedinicu površine. Tako dobijamo da je polje jače tamo gdje su linije gušće i obrnuto. Smjer polja je takođe određen konvencijom: linije polja ističu iz pozitivnog, a utiču u negativno naelektrisanje.

Električno polje, kao veličina koja karakteriše stanje pobuđenosti neke sredine, zadovoljava jedan prost zakon za čije je formulisanje potrebno uvesti dva pojma: pojam orjentisane



površine (ili vektora površine) i pojam fluksa neke vektorske veličine. Neka je data neka zatvorena površina S konačne veličine. Uočimo na njoj neki beskonačni mali element dS (kako smo to ranije objasnili). Tu elementarnu površinu dS možemo predstaviti vektorom $\overrightarrow{dS}$ (čiji je intenzitet dS, a pravac i smjer su dati ortom $\vec{n}$ - jediničnim vektorom, sa smjerom van domena kog zatvara površina S), te je: $\overrightarrow{dS} = dS \cdot \vec{n}$. Ako je površ S otvorena, tada ne postoje pojmovi van i unutar pa se uvodi ovakva konvencija: uoči se kontura C na koju se oslanja površina S; sada se kao pozitivan smjer orta uzima onaj koji odgovara smjeru desne zavojnice.

Fluks vektora $\vec{E}$ kroz površinu $\vec{S}$ definiše se relacijom $\psi = \int_S \vec{E} d\vec{S}$.



Sada možemo formulisati zakon koji je vezan za fluks vektora $\vec{E}$: neka se naelektrisanje Q (izvor polja) nalazi unutar domena zapremine υ koga ograničava površina S. Tada je (vidi sliku)

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \tag{0.3}$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{ob}}{\varepsilon_0} \tag{0.4}$$

Ovo je integralna forma Gausove teoreme. Važi za vakuum!

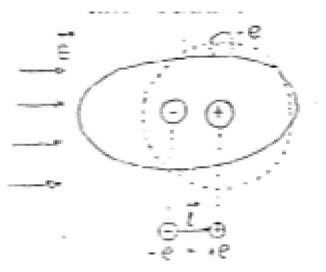
$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \tag{0.5}$$

3 Uopštena Gausova teorema. Vektor dielektričnog pomjeraja

Kako bi glasila Gausova teorema kada bi naelektrisanja bila smještena u nekakvoj sredini?

Kao prvo: bilo koja supstanca se može smatrati kao sistem čestica između kojih je vakuum. Kao drugo: prema svom ponašanju u električnom pogledu prije i poslije unošenja u električno polje sve se supstance dijele uglavnom na **polarne** i **nepolarne**.

<u>Nepolarne supstance</u>. Atom svake supstance može se predstaviti planetarnim (Borovim) modelom. Kao najprostiji posmatrajmo atom vodonika i neka se u prvi mah nalazi izvan domašaja električnog polja. Elektron se kreće oko jezgra po sfernoj putanji brzinom koja je bliska brzini svjetlosti. Otuda možemo smatrati da je sfera, po kojoj se kreće elektron, naelektrisana sfera čije je naelektrisanje –e ! Sa druge strane, polje ove sfere prema vani je isto kao da je naelektrisanje –e smješteno u njenom središtu. Kako je u središtu smješteno i pozitivno naelektrisanje +e to možemo reći da su centri dejstva naelektrisanja –e i +e u centru sfere! S toga možemo konstatovati da je atom električno neutralan prema vani!



Ako sada ovakav atom unesemo u električno polje na njega će djelovati to polje silom $\vec{F} = q\vec{E}$ (na jezgro), a silom $\vec{F} = -q\vec{E}$ (na elektron). Kao posledica toga jeste činjenica da elektronska orbita neće biti više idealno sferna, kao prije djelovanja polja, već da će se deformisati više ili manje, zavisno od jačine polja. Centar dejstva elektronske orbite više nije u centru atoma, tj ne poklapa se sa centrom dejstva jezgra! Otuda imamo pravo da, prvobitno neutralan atom, sada shvatimo kao jedan dipol (električni) ! Kažemo da se atom polarizovao. Kako se isto desilo i sa ostalim atomima supstance to kažemo da se supstanca <u>polarizovala</u>. Imamo pravo da ovakvu supstancu tretiramo kao <u>sistem dipola u vakuumu</u>! Supstanca koja se ovako polariše zove se nepolarnom supstancom (atomi su joj prvobitno bili neutralni).

<u>Polarne supstance</u>. Struktura ovakvih supstanci je takva da joj atomi, odnosno molekuli, već predstavljaju dipole koji su haotično raspoređeni te, statistički gledano, podjednako su orjentisani u svim pravcima pa im se dejstva poništavaju prema vani. Međutim, ako takvu supstancu unesemo u električno polje tada će se elementarni dipoli poređati u pravcima polja ili u pravcima bliskim ovom! Za supstancu kažemo da polarizovala. Tipičan predstavnik polarne supstance je voda.

Bilo da se radi o jednoj ili drugoj vrsti supstance, stanje tj. stepen polarizovanosti se može okarakterisati sa jednom jedinom veličinom. To je **vektor polarizacije** $\vec{P}$. Evo kako se on definiše.

Najprije definišemo dipolni momenat svakog elementarnog dipola kao

$$\vec{p} = \Delta q \vec{l} \tag{0.6}$$

Gdje je $\vec{l}$ vektor položaja (pomjeranja) negativnog u odnosu na pozitivno naelektrisanje, sa smjerom od $-\Delta q$ ka $+\Delta q$.

Vektor polarizacije $\vec{P}$ se definiše kao broj elementarnih dipola u jedinici zapremine, tj

$$\vec{P} = \frac{\sum_{d\upsilon} \vec{p_i}}{d\upsilon} \tag{0.7}$$

Kako je naš pristup makroskopski to smatramo da svi dipoli u $d\upsilon$ imaju isti dipolni momenat, tj $p_i = p$, te je

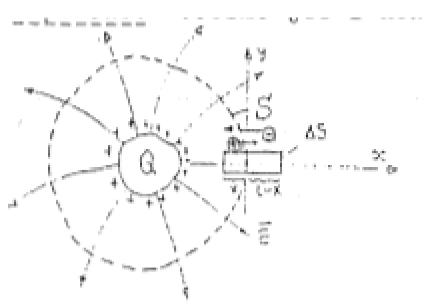
$$\vec{P} = \frac{\sum_{d\upsilon} \vec{p_i}}{d\upsilon} = \frac{N' d\upsilon \vec{p}}{d\upsilon} = N' \vec{p} \tag{0.8}$$

Gdje je N' broj dipola (atoma) u jedinici zapremine. Iz gornje relacije slijedi da vektor $\vec{P}$ ima prirodu **površinske gustine naelektrisanja**!

Naime,

$$P(=) \frac{C \cdot m}{m^3} = \frac{C}{m^2} \tag{0.9}$$

Vektor P je sasvim dovoljan da se opiše proces polarizacije supstance.



Uočimo neko slobodno naelektrisanje Q uneseno unutar neke dielektrične supstance. Uočimo još i neku zamišljeno površinu S u čijoj je svakoj tački vektor $\vec{E}$ normalan na površinu (radi jednostavnosti). Kroz površinu S, tj kroz svaki njen mali element ΔS imamo trenutno pomjeranje elektriciteta (polarizacija). Može se postaviti pitanje: Koliko je naelektrisanja prošlo kroz element ΔS ? A zatim: Koliko je ukupno naelektrisanje Q_p prošlo kroz površinu S ? Jer kada se ono nađe tada je $Q_{ob} = Q - Q_p$.

Sa slike je očigledno

$$\Delta Q_p = (+\Delta q)\,N'\Delta S\cdot x - (-\Delta q)\,N'\Delta S(l - x) = \Delta qN'X\Delta S\cdot l = pN'\Delta S = P\Delta S \Rightarrow \tag{0.10}$$

$$P = \frac{\Delta Q_p}{\Delta S} \tag{0.11}$$

Vektor $\vec{P}$ je površinska gustina onog naelektrisanja koje se u dielektriku (supstanci uopšte) pomjerilo u procesu polarizacije kroz element površine ΔS.

Dakle, iz gornje relacije imamo:

$$\Delta Q_p = P \cdot \Delta S \tag{0.12}$$

, ili $\Delta Q_p = \vec{P}\Delta\vec{S}$, ili, (prelaskom na infinitezimalne veličine)

$$dQ_p = \vec{P}d\vec{S} \tag{0.13}$$

, ili, za zatvorenu površinu *S:*

$$Q_p = \oint_S \vec{P}d\vec{S} \tag{0.14}$$

Primijenimo sada Gausovu teoremu

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = Q_{ob} \text{ , pa je} \tag{0.15}$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q - Q_p}{\varepsilon_0} \tag{0.16}$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q - \oint_S \vec{P}d\vec{S}}{\varepsilon_0} \tag{0.17}$$

$$\oint_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})d\vec{S} = Q \tag{0.18}$$

Ako izraz u zagradi označimo sa

$$\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \vec{D} \tag{0.19}$$

Dobijamo konačno

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = Q \tag{0.20}$$

Ovaj izraz predstavlja uopštenu Gausovu teoremu. Vektor $\vec{D}$ se zove **vektor dielektričnog pomjeraja, ili vektor električnog pomjeraja** (jer nije vezan samo za dielektrik, pošto se svaka materijalna sredina u električnom polju polarizuje).

U vakuumu je vektor $\vec{P} = 0$ te se gornja relacija svodi na poznati oblik Gausove teoreme u vakuumu:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \tag{0.21}$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{ob}}{\varepsilon_0} \tag{0.22}$$

Nadalje rezonujemo ovako: ukoliko je električno polje jačeg intenziteta utoliko će i proces polarizacije biti jače izražen! A to znači da jače polje izaziva veći dipolni momenat $\vec{p}$ kod atoma supstance. Kod **linearnih sredina** možemo reći da je $\vec{p}$ srazmjerno sa $\vec{E}$ tj da je

$$\vec{p} \sim \vec{E} \tag{0.23}$$

Odavde slijedi i da je

$$\vec{P} \sim \vec{E} \tag{0.24}$$

Tj.

$$\vec{P} = const \cdot \vec{E} \tag{0.25}$$

Ova konstanta karakteriše tu supstancu, tj pokazuje kolika je polarizovanost te supstance.

Imamo pravo da ovu konstantu proporcionalnosti (srazmjere) napišemo i u obliku

$$const. = \varepsilon_0 \lambda \tag{0.26}$$

Te je sada

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \lambda \vec{E} \tag{0.27}$$

Na kraju, vraćajući se na definiciju vektora $\vec{D}$ imamo

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \lambda \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\lambda) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \tag{0.28}$$

Gdje je: $1+\lambda = \varepsilon_r$ a $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon$. Dakle,

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{0.29}$$

(Vektor električnog pomjeraja u linearnim sredinama).

Dielektrična konstanta nekog dielektrika (jer smo u čitavom ovom posmatranu imali u vidu dielektričnu supstancu) izražava u stvari sposobnost atoma te supstance da se više ili manje polarizuje pod dejstvom polja!

Napomena: Dielektričnu konstantu bismo mogli zvati sa istim pravom i električnom konstantom dielektrika, jer je ona svojstvena i provodnicima kao i neprovodnicima (dielektricima). Drugo: do kada traje polarizacija? Dok se restitucione kulonovske sile (sile između jezgra i omotača) ne izjednače sa silama spoljašnjeg polja. To je trenutan proces.